

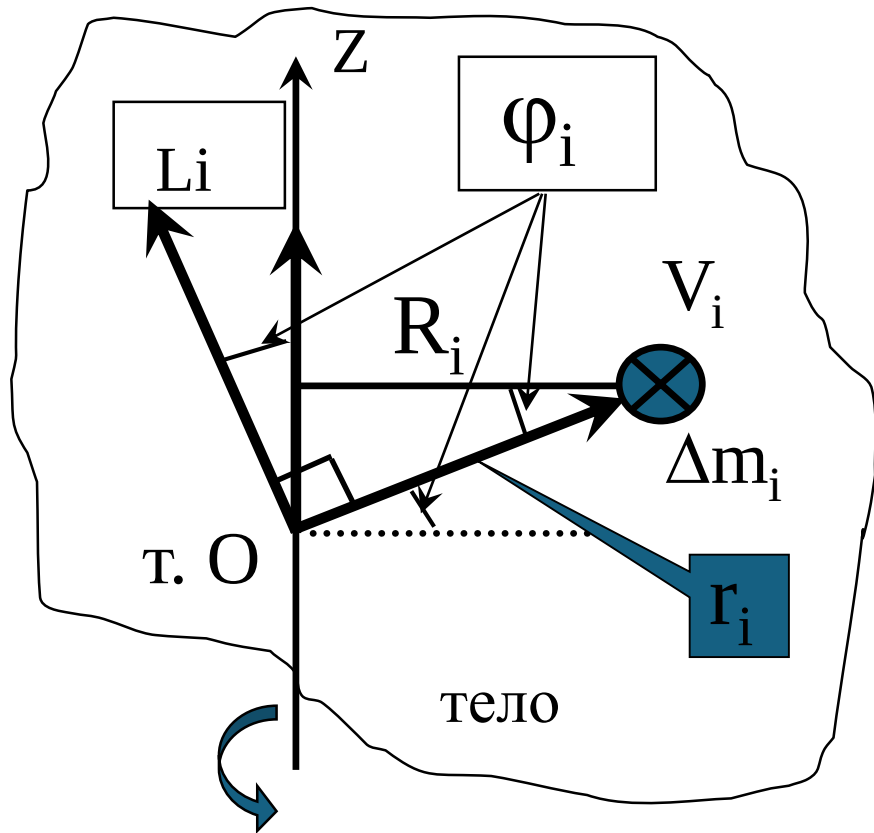


Лекция 4

«Динамика твердого тела»

PhD, Жакыпов Әлібек Серікұлы

Вращение твердого тела



Рассмотрим тело, вращающееся вокруг оси Z , с угловой скоростью ω . Разобьем это тело на маленькие массы Δm_i и запишем, чему равен момент импульса:

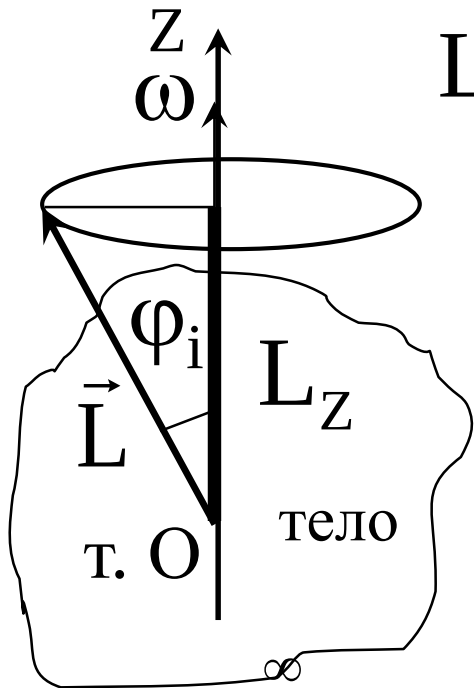
$$\begin{aligned}\vec{L}_i &= [\vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i] = \\ &= \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]\end{aligned}$$

Полный момент импульса:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$$

Вращение твердого тела

Для несимметричного тела вектора ω и L непараллельные, следовательно при вращении тела момент импульса описывает конус. Найдем проекцию момента импульса L на ось Z :



$$L_{Zi} = \Delta m_i \cdot r_i \cdot v_i \cdot \cos \varphi_i = \Delta m_i \cdot R_i \cdot v_i$$

где: $R_i = r_i \cdot \cos \varphi_i$ $v_i = \omega \cdot R_i$ Тогда:

$$L_{Zi} = \Delta m_i \cdot R_i \cdot v_i = \Delta m_i \cdot R_i \cdot \omega \cdot R_i$$

$$L_{Zi} = \Delta m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega$$

Проекция полного момента импульса равна сумме проекций:

$$L_Z = \sum_{i=1}^{\infty} L_{Zi} = \sum_{i=1}^{\infty} \omega \cdot \Delta m_i \cdot R_i^2 = \omega \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \cdot R_i^2$$

Обозначим: $J =$ момент инерции. $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \cdot R_i^2$

Момент инерции

Величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояний от оси вращения до этих масс называется моментом инерции тела относительно этой оси.

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \cdot R_i^2 \quad - \text{ момент инерции (скаляр).}$$

Момент инерции аналог массы при прямолинейном движении.

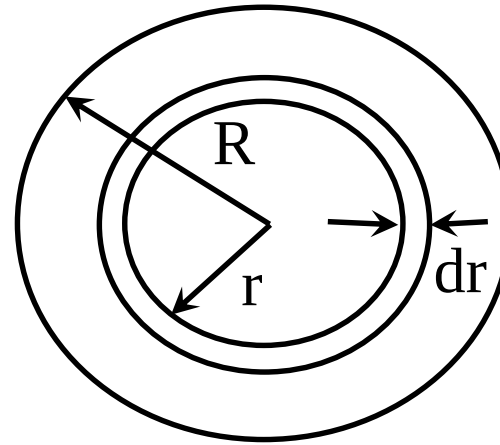
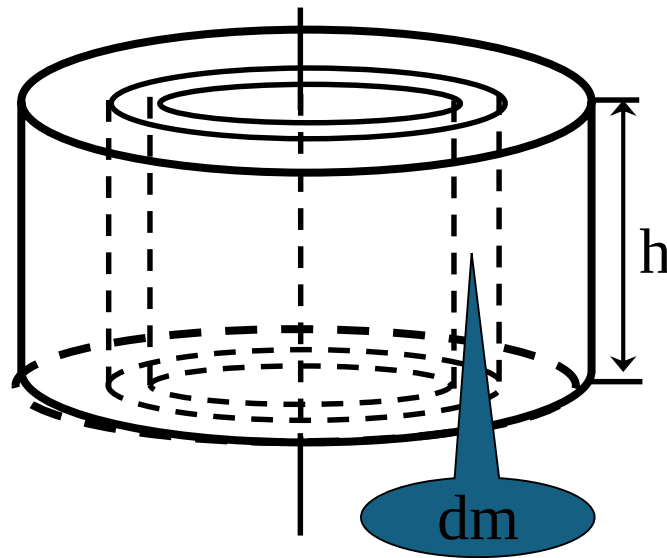
$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad \text{Мы знаем, что:} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{Тогда:}$$

$$\frac{d}{dt} (J \cdot \vec{\omega}) = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \quad - \text{ уравнение динамики вращательного движения}$$

Момент инерции тел

Пример № 1: Момент инерции цилиндра



R – внешний радиус

r – текущий радиус

dr – толщина слоя

dm – масса слоя

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot \rho \cdot dV = r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr = 2\pi \rho h \cdot r^3 dr$$

$$J = \int dJ = \int_0^R 2\pi \rho h \cdot r^3 dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R =$$

Момент инерции тел

$$J = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2}\rho h \cdot \pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot hS_{\text{осн.}} \cdot R^2 =$$

$$\frac{1}{2}\rho \cdot V \cdot R^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

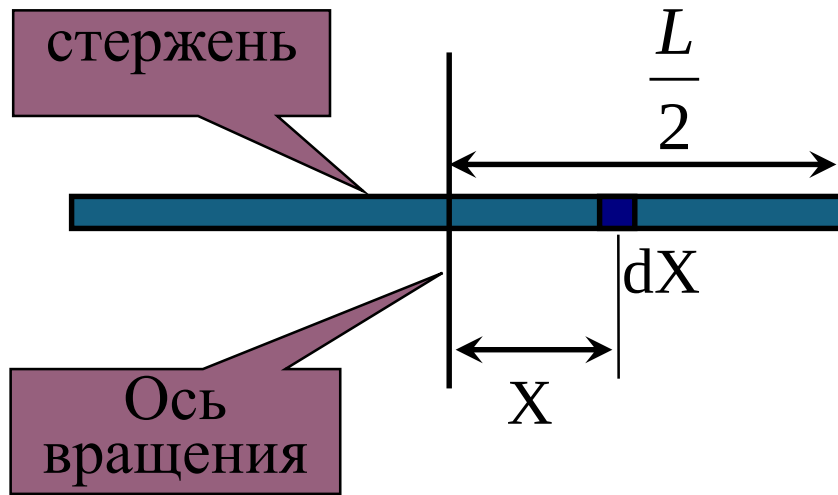
Итого, момент инерции цилиндра равен:

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

Где : М – масса цилиндра,
R – радиус цилиндра.

Момент инерции тел

Пример № 2: Момент инерции стержня



Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину.

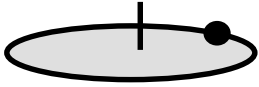
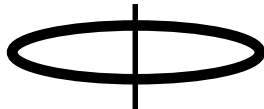
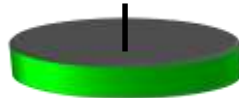
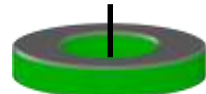
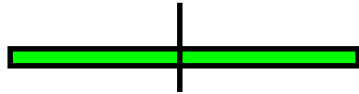
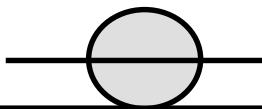
По определению:

$$J = \int_0^M R^2 dm$$

Для нашего случая вычислим J для половины стержня:

$$J_{1/2} = \int_0^M x^2 dm = \int_0^V x^2 \rho dV = \int_0^{L/2} x^2 \cdot \rho \cdot S dx = \rho \cdot S \cdot \int_0^{L/2} x^2 dx = \rho \cdot S \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{L/2} = \frac{1}{3} \rho \cdot S \cdot \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - 0 \right] =$$

Теорема Штейнера

Фигура	Ось вращения	Рисунок	Момент инерц
Мат. точка	На расст. R		$J = mR^2$
Обруч	В центре $\perp$ пл.		$J = mR^2$
Труба	Через центр		$J = mR^2$
Диск	- « - » -		$J = \frac{1}{2} mR^2$
Толст. труба	- « - » -		$J = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)$
Стержень	- « - » -		$J = \frac{1}{12} mR^2$
Стержень	Через край		$J = \frac{1}{3} mR^2$
Шар	Через центр		$J = \frac{2}{5} mR^2$

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.
3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.
5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980
6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т.